UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

15 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Correction de l'exercice 1.

1. a. Il suffit de l'écrire.

b. Soit k un entier non nul et $T = (p, q, r)$ un triplet d'entiers relatifs tel que r non nul.

$$T \in \Gamma \Leftrightarrow p^2 + q^2 = r^2 \Leftrightarrow (kp)^2 + (kq)^2 = (kr)^2 \Leftrightarrow kT \in \Gamma$$

2. a. Posons $T_1 = (p_1, q_1, r_1)$ et $T_2 = (p_2, q_2, r_2)$. Alors.

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} & = & p_1p_2 + q_1q_2 \\ \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\| & = & \|(p_1q_2 - p_2q_1)\overrightarrow{k}\| \quad = \quad |p_1q_2 - p_2q_1| \\ \text{et } \|\overrightarrow{OM_1}\|.\|\overrightarrow{OM_2}\| & = & r_1r_2 \end{array}$$

sont bien des entiers. Ensuite

$$\begin{array}{lcl} \left(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}\right)^2 & = & \|\overrightarrow{OM_1}\|^2.\|\overrightarrow{OM_2}\|^2 \cos^2\theta \\ \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|^2 & = & \|\overrightarrow{OM_1}\|^2.\|\overrightarrow{OM_2}\|^2 \sin^2\theta \end{array}$$

Donc

$$\left(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}\right)^2 + \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|^2 = \left(\|\overrightarrow{OM_1}\|.\|\overrightarrow{OM_2}\|\right)^2$$

et $T_1 * T_2 \in \Gamma$.

Ou bien :

$$\begin{array}{lclcl} \left(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}\right)^2 + \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|^2 & = & (p_1p_2 + q_1q_2)^2 + |p_1q_2 - p_2q_1|^2 & = & p_1^2p_2^2 + q_1^2q_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_2^2q_1^2 \\ & = & (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) & = & r_1^2r_2^2 \\ & = & \left(\|\overrightarrow{OM_1}\|.\|\overrightarrow{OM_2}\|\right)^2 & & \end{array}$$

b. Le triplet $T_1 * T_2$ est trivial si et seulement si $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = 0$ (c'est à dire (OM_1) et (OM_2) sont perpendiculaires) ou $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2} = 0$ (c'est à dire $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont colinéaires donc (OM_1) et (OM_2) sont confondues).

c. Notons M' et M'' les points associés au triplets T' et T''.

Alors $S' = T' * T'' = \left(\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''}, \|\overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{OM''}\|, \|\overrightarrow{OM'}\|.\|\overrightarrow{OM''}\|\right) = (63, 16, 65)$ appartient à Γ et il est irréductible.

$T''_0 = (-5, 12, 13)$ est aussi un élément de Γ ; notons M''_0 le point associé au triplet T''_0.

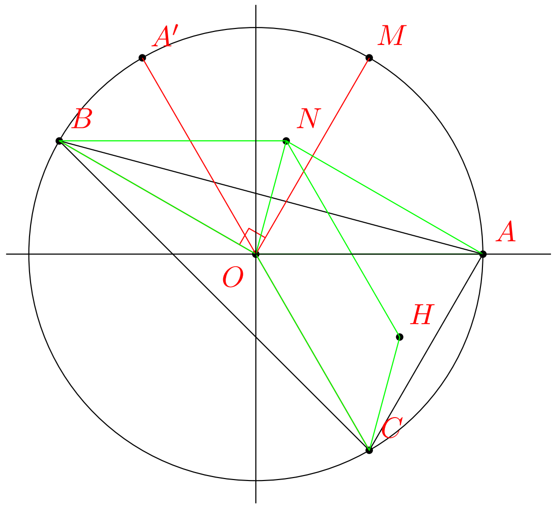
Alors $S'' = T' * T''_0 = \left(\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''_0}, \|\overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{OM''_0}\|, \|\overrightarrow{OM'}\|.\|\overrightarrow{OM''_0}\|\right) = (33, 56, 65)$ appartient à Γ et il est irréductible.

Notons N' et N'' les points associés au triplets S' et S''.

Alors $S' * S'' = \left(\overrightarrow{ON'}.\overrightarrow{ON''}, \|\overrightarrow{ON'} \wedge \overrightarrow{ON''}\|, \|\overrightarrow{ON'}\|.\|\overrightarrow{ON''}\|\right) = (2975, 3000, 4225)$ appartient à Γ mais est réductible. Le triplet irréductible correspondant est $(119, 120, 169)$.

on obtient d'autres triplets en combinant par exemple T' et S' ou T'' et S' etc...

Correction de l'exercice 2.



1. A' appartient $\mathcal{C}$ car la droite (OM) est un axe de symétrie de ce cercle.
De plus $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 2\theta\ [2\pi]$.
C appartient $\mathcal{C}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 2\theta + \pi\ [2\pi]$.
Il vient : $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \pi\ [2\pi]$.
Donc A' et C sont bien symétriques par rapport à O.

2. a. $b = \mathrm{e}^{i(\theta+\pi/2)} = \mathrm{e}^{i\pi/2}.\mathrm{e}^{i\theta} = iz$ et $c = \mathrm{e}^{i(2\theta+\pi)} = \mathrm{e}^{i\pi}.\mathrm{e}^{2i\theta} = -z^2$.

b. $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; donc N est le quatrième sommet du parallélogramme dont trois points consécutifs sont B, O et A.
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OC}$; donc H est le quatrième sommet du parallélogramme dont trois points consécutifs sont C, O et N.

3. θ est différent de $\pi/2\ [\pi]$ signifie que z est différent de i et de $-i$
Alors $b = iz$ différent de 1 (et de -1) ; A et B sont donc distincts.
De même $c = -z^2$ différent de 1 (et de -1) ; A et C sont donc distincts.
Enfin $b - c$ est différent de 0 (et de -2) ; par conséquent B et C sont distincts.

$$\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{b+c}{b-c} = \frac{iz - z^2}{iz + z^2} = \frac{1 - iz}{1 + iz} \quad \text{et} \quad \frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \frac{1+b}{1-b} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\text{Ensuite : } \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+\mathrm{e}^{2i\alpha}}{1-\mathrm{e}^{2i\alpha}} \text{ avec } \alpha = \theta/2 + \pi/4$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - \mathrm{e}^{i\alpha}}$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} i \text{ est bien imaginaire pur}$$

On en déduit que les angles $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{BA})$ sont droits ; H est donc l'intersection des hauteurs c'est à dire l'orthocentre du triangle ABC.
a. Le discriminant de l'équation est $i^2 + 4 = 3$. Les racines de l'équation sont donc $z_1 = \dfrac{i+\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\pi/6}$ et $z_1 = \dfrac{i-\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{5i\pi/6}$
Le centre de gravité G du triangle ABC est $\dfrac{1}{3}(1+b+c)$.
Pour que H coïncide avec G il faut et il suffit que $1+b+c$ soit égale à $\dfrac{1}{3}(1+b+c)$ c'est à dire que $1+b+c = 0$ ou $z^2 - iz - 1 = 0$. Donc H coïncide avec G si et seulement si $\theta = \pi/6$ ou $\theta = 5\pi/6$

4. Puisque l'affixe z s'écrit $\cos\theta + i\sin\theta$, celle de H s'écrit :

$$\begin{aligned} 1 + iz - z^2 &= 1 + i(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= 1 - \sin\theta + i\cos\theta - \cos 2\theta - i\sin 2\theta \qquad \text{formule de Moivre} \\ &= 1 - \sin\theta - \cos 2\theta + i(\cos\theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

Donc H est le point de $\mathcal{H}$ de paramètre θ.

PROBLEME. Partie A

1. a. la fonction f est définie et continue sur $[0,1[$.
Elle est dérivable dans cet intervalle et

$$\forall x \in [0,1[,\ f'(x) = -2x - \frac{1}{1-x}$$

La dérivée, somme de deux réels négatifs dont l'un l'est strictement, est strictement négative. $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = -\infty$.
Voici le tableau de variation de f.

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f est strictement décroissante et envoie l'intervalle $[0,1[$ sur l'intervalle $[-\infty,1[$ qui contient 0, donc l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.
b. $f(1/2) = 3/4 - \ln 2 > 0$ et $f(\beta) = -\beta^2 < 0$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, α appartient à l'intervalle $]1/2, \beta[$.

2. Posons pour simplifier $I_\beta =]1/2, \beta]$.
f est deux fois dérivable dans $[0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1[,\ f''(x) = -2 - \frac{1}{(1-x)^2}$$

Alors $\forall x \in I_\beta,\ p(x) = 2x + \dfrac{1}{1-x}$ et $q(x) = 2 + \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
p et q sont dérivables sur I_β et

$$\forall x \in I_\beta,\ p'(x) = 2 + \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } q'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Ces dérivés sont positives.
Voici les tableaux de variation de p et q.

x	$1/2$		β
$p'(x)$		$+$	
$p(x)$	3	$\nearrow$	$p(\beta)$

x	$1/2$		β
$q'(x)$		$+$	
$q(x)$	6	$\nearrow$	e^2+2

Ces tableaux montrent clairement que

$$\forall x \in I_\beta,\ 3 \leq |f'(x)| \text{ et } |f''(x)| \leq \mathrm{e}^2 + 2$$

ce qui entraîne bien

$$\forall x, y \in I_\beta, \frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq \frac{\mathrm{e}^2+2}{3} = M$$

3. a. On peut procéder à une IPP en posant $u = \ln(1-x)$ et $v = 1-x$, il vient $u' = -\dfrac{1}{1-x}$ et $v' = -1$ puis

$$\int_\alpha^t \ln(1-x)dx = -\int_\alpha^t uv'dx = -[uv]_\alpha^t + \int_\alpha^t u'vdx = \Big[-x-(1-x)\ln(1-x)\Big]_\alpha^t$$

Il est probable que le candidat fasse le changement de variable $1-x = u$ pour se ramener à $\int \ln u du = u\ln u - u$. Il peut aussi faire une IPP en posant $u = \ln(1-x)$ et $v' = 1$ et s'il choisit $v = x$, il devra trouver une primitive de $\dfrac{x}{1-x}$ en procédant à une réduction en éléments simples

b. $\displaystyle\int_\alpha^t f(x)dx = \int_\alpha^t (1-x^2)dx + \int_\alpha^t \ln(1-x)dx$. Donc

$$\int_\alpha^t f(x)dx = \varphi(t) - \varphi(\alpha) \text{ avec } \varphi(x) = -\frac{1}{3}x^3 - (1-x)\ln(1-x)$$

Lorsque t tend vers 1^-, $(1-t)\ln(1-t)$ a pour limite 0, donc

$$\lim_{t \mapsto 1^-} \int_\alpha^t f(x)\, dx = -1/3 - \varphi(\alpha).$$

Mais $f(\alpha) = 0$ signifie $\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$

$$\lim_{t \mapsto 1^-} \int_\alpha^t f(x)\, dx = P(\alpha) \text{ avec } P(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x - \frac{4}{3}$$

Partie B

1. a. La tangente en A à $\mathcal{C}_h$ a pour équation $y = h'(a)(x-a) + h(a)$. l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0, son abscisse x est donc telle que $h'(a)(x-a) + h(a) = 0$ c'est à dire $x = a - \dfrac{h(a)}{h'(a)} = T(a)$.

b. T, rapport de deux fonctions dérivables, est dérivable et

$$\forall x \in J,\ T'(x) = 1 - \frac{(h'(x))^2 - h(x)h''(x)}{(h'(x)^2} = \frac{h(x)h''(x)}{(h'(x))^2}$$

T' est donc positive sur J.

Mais $T(v) = v - \dfrac{h(v)}{h'(v)}$ est $\leq v$ car le rapport h/h' est ≥ 0;

donc $T(J) = [u, T(v)] \subset [u, v] = J$.

Voici le tableau de variation de T.

x	u	v
$T'(x)$	$+$	
$T(x)$	u $\nearrow$	$T(v)$

2. a. Montrons que la suite (x_n) est bien définie et contenue dans J donc bornée.

Par récurrence. $x_0 = v$ existe et appartient à J.

Si la propriété est vraie pour un rang n donné, c'est à dire si x_n existe et appartient à J, alors $x_{n+1} = T(x_n)$ existe et appartient bien à J car $T(J)$ est contenu dans J. Donc la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = T(x_n) = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)}$ est $\leq x_n$ car le rapport h/h' est ≥ 0; donc la suite (x_n) est décroissante.

Comme elle est minorée par u, elle converge vers un réel $\ell \geq u$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = T(x_n)$ on obtient par passage à la limite $T(\ell) = \ell$ c'est à dire $\ell - \dfrac{h(\ell)}{h'(\ell)} = \ell$ ou $h(\ell) = 0$. Comme u est l'unique zéro de h, $\ell = u$. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = u$.

Partie C

1. a. $G(a) = 0$.

b. $G(b) = 0$ est équivalent à : $g(a) - g(b) - (a-b)g'(b) - \dfrac{1}{2}k(a-b)^2$

c'est à dire $k = \dfrac{2}{(a-b)^2}\Big[g(a) - g(b) - (a-b)g'(b)\Big]$.

2. a. La fonction G satisfait aux hypothèses du théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[a, b]$; donc il existe un réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que $G(b) - G(a) = G'(c)(b-a)$ c'est à dire $G'(c) = 0$.

b. On a pour tout x dans $[a, b], G'(x) = -(a-x)g''(x) + k(a-x)$.

$G'(c) = 0$ est donc équivalent à : $k = g''(c)$ c'est à dire

$$\frac{2}{(a-b)^2}\Big[g(a) - g(b) - (a-b)g'(b)\Big] = g''(c)$$

$$\text{ou } g(a) - g(b) - (a-b)g'(b) = \frac{1}{2}(a-b)^2 g''(c);$$

$$\text{enfin } g(a) = g(b) + (a-b)g'(b) + \frac{1}{2}(a-b)^2 g''(c)$$

3. a. D'après les calculs faits dans la première partie, la fonction f satisfait bien dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ aux hypothèses faites sur h.

b. Pour tout entier naturel n, cette même fonction f satisfait, dans l'intervalle $[\alpha, x_n]$, aux hypothèses faites sur g. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c_n \in]\alpha, x_n[\text{ tel que } f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n) \quad (*)$$

4. Pour obtenir la relation $(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha)^2 \dfrac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \quad (**)$

il suffit de se rappeler que $f(\alpha) = 0$ et de diviser la relation $(*)$ par le réel non nul $f'(x_n)$.

D'après la première partie, puisque x_n et c_n appartiennent à I_β, $\dfrac{|f''(c_n)|}{|f'(x_n)|} \leq M$ et $(**)$ entraîne $(x_{n+1} - \alpha) \leq \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$

5. Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n = \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)$, la relation $0 \leq (x_{n+1} - \alpha) \leq \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$ se traduit par $0 \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n^2$

Montrons que $\delta_n \leq {\delta_0}^{2^n} \leq \left(\dfrac{M}{4}\right)^{2^n}$. Par récurrence.

Cette propriété est vrai au rang 0 car à ce rang elle signifie $\delta_0 \leq \delta_0 \leq \dfrac{M}{4}$

Si elle est vraie pour un rang donné n c'est à dire si $\delta_n \leq {\delta_0}^{2^n} \leq \left(\dfrac{M}{4}\right)^{2^n}$, alors

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n^2 \leq \left({\delta_0}^{2^n}\right)^2 = {\delta_0}^{2^{n+1}} \leq \left(\frac{M}{4}\right)^{2^{n+1}}$$

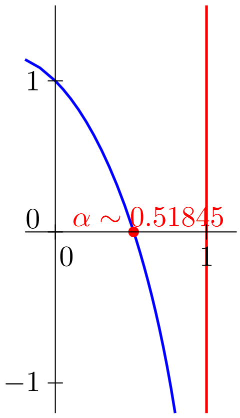
Elle est donc vraie au rang suivant $n+1$.

6. Pour tout entier naturel n on a les implications suivantes :

$$x_n - \alpha \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{2}{M}\delta_n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \delta_n \leq \frac{M}{2\times 10^5} \Leftarrow \left(\frac{M}{4}\right)^{2^n} \leq \frac{M}{2\times 10^5} \Leftrightarrow 2^n \ln\frac{M}{4} \leq \ln\frac{M}{2\times 10^5}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq \frac{\ln(M/2\times 10^5)}{\ln(M/4)} \text{ car } M/4 < 1 \Leftrightarrow n\ln 2 \geq \ln\left(\frac{\ln M/2\times 10^5)}{\ln M - \ln 4}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\ln 2} \quad \ln\left(\frac{\ln M - \ln(2\times 10^5)}{\ln M - \ln 4}\right) \sim 5.4949$$



On peut prendre $n = 6$