UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

11 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 199

EXERCICE 1. (4 pts)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 27 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= 3u_n - 4 \end{aligned}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n?

2 × 0,25 pts

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n\ [8]$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{2n} \equiv 3\ [8]$ et $u_{2n+1} \equiv 5\ [8]$.

0,25+0,5+0,5 pts

3. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = u_n - 2$.
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n = 50 \times 3^n + 4$.

2 × 0,25 pt

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 54\,[100]$.
Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

0,25 + 0,75 pt

5. Montrer que deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux.

0,75 pt

EXERCICE 2. (4 pts)

L'espace orienté $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= z+1 \\ z' &= x-1 \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une isométrie. (c'est à dire que f conserve la distance.)

0,5 pt

b) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées $(0, 0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

0,5 pt

2. Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A.
a) Montrer que le point I de coordonnées $(-1, 0, 0)$ appartient à P. **0,5 pt**
b) Prouver que $I' = f(I)$ appartient à P. **0,5 pt**

3. Déterminer la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques. **0,5 pt**

4. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient :
a) au plan Q d'équation cartésienne : $2x + y - z = 0$; **0,75 pt**
b) à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est : $x = y = z$. **0,75 pt**

PROBLEME. (12 pts)

Partie A

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ et admettant sur I une dérivée troisième f''' continue. Soit a un point de I, $a \neq 0$.

1. a) Dire pourquoi f''' est bornée (c'est à dire il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f'''(x) \leq M$ ou il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'''(x)| \leq K$.)
En déduire $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{1}{a^2} \displaystyle\int_0^a (a-x)^2 f'''(x)\, dx$. **0,25+0,5 pt**
b) Soit g une fonction numérique définie sur I et admettant sur I une dérivée troisième g''' continue.
Quelle est la dérivée de $f''g' - f'g''$?
En déduire que

$$\int_0^a f'(x) g'''(x)\, dx = \Big[(f'g'' - f''g')(x)\Big]_0^a + \int_0^a f'''(x) g'(x)\, dx. \qquad (0.1)$$

0,25+0,5 pt

2. On prend $g(x) = \dfrac{1}{6}(a-x)^3$.
a) Après avoir calculé $g'(x)$, $g''(x)$ et $g'''(x)$ pour $x \in I$, montrer en utilisant la relation (0.1) que

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2} f''(0)a^2 + \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 f'''(x)\, dx.$$

0,5 pt

b) **Application**
En choisissant pour f la fonction $x \mapsto e^x$, calculer $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{e^a - a - 1}{a^2}$. **0,5 pt**

3. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe $\mathcal{G}$ de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} \\ y(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}\, e^t \end{cases} \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

a) Montrer que les fonctions x et y sont continues au point 0. **0,25+0,25 pt**
b) Vérifier qu'elles sont dérivables en 0. Quelle est la tangente T_B à $\mathcal{G}$ au point B de coordonnées $(1, 1)$? **3 × 0,25 pt**

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction numérique f_n définie sur $[0 \; +\infty[$ par : $f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - (e + \frac{1}{n})\sqrt{x}$. $\mathcal{C}_n$ est sa courbe représentative dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0, +\infty[$ et calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$.
La fonction f_n est-elle dérivable au point 0 ? (On pourra utiliser 2.b de la partie A)

3 × 0,25 pt

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$ et dresser le tableau de variations de f_n.

3 × 0,25 pt

c) Construire dans le repère, la courbe $\mathcal{C}_1$, sa demi-tangente au point d'abscisse 0 et sa tangente au point d'abscisse $\Big[\ln(e+1)\Big]^2$.

3 × 0,25 pt

2. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions α_n et β_n telles que

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n.$$

2 × 0,25 pt

b) Soit b un réel positif ou nul. Montrer que $\displaystyle\int_0^b e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 + 2(\sqrt{b} - 1)e^{\sqrt{b}}$. Pour cela, on pourra utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx$$

en prenant $u(x) = \sqrt{x}$. **0,5 pt**

c) Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha_n} f_n(x)\, dx$.

Vérifier que $I_n = 2 + 2(e + \frac{1}{n})\sqrt{\alpha_n}\left(\sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3}\alpha_n - 1\right)$. **0,25 pt**

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

a) Démontrer que les restrictions h_1 et h_2 de φ respectivement à chacun des intervalles $V_1 =]0, 1]$ et $V_2 = [1, +\infty[$ sont des bijections de V_1 et V_2 respectivement sur des intervalles à déterminer.

0,5 pt

On pose $h = h_2^{-1} \circ h_1$ et on désigne par C_h la courbe de h dans le repère.
On ne cherchera pas l'expression de $h(x)$ en fonction x.

b) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $e + \frac{1}{n} = h_1(\sqrt{\alpha_n})$; en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. **3 × 0,25 pt**

c) Déterminer de même la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$. **0,25 pt**

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n le point du plan de coordonnées $(\sqrt{\alpha_n}, \sqrt{\beta_n})$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le point M_n appartient à C_h (c'est à dire $h(\sqrt{\alpha_n}) = \sqrt{\beta_n}$).

0,25 pt

b) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
Montrer que la fonction h est décroissante. **2 × 0,25 pt**

c) Démontrer que h est dérivable dans $]0,1[$. **0,25 pt**

En remarquant que

$$\varphi(x) = \varphi(h(x)), \tag{0.2}$$

pour tout x appartenant à V_1, établir que $\forall x \in]0,1[,\ h'(x) = \dfrac{x-1}{x} \times \dfrac{h(x)}{h(x)-1}$. **0,25 pt**

5. **a)** Soit $M(x,y)$ un point de C_h. On pose $t = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

En utilisant la relation (0.2), montrer que :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} & = & e^t \\ y - x & = & t \end{cases}$$

En déduire que M est le point de $\mathcal{G}$ de paramètre t. **0,5 + 0,25 pt**

b) Réciproquement, vérifier que tout point de $\mathcal{G}$ appartient à C_h. **0,5 pt**

c) Donner une équation de T_A, tangente à C_h au point A d'abscisse $0,4$ (On prendra 2 comme valeur approchée de $h(0,4)$).

Représenter la courbe C_h ainsi que les tangentes T_A et T_B. **0,25 + 0,5 pt**