UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

2020 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

$1^{er}$ **groupe**

# CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

**Exercice 1 (07 points).**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

## Partie A

**1.** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Complétons ces propriétés sur les modules et arguments de nombres complexes ci-après :

**a.** $|z^n| = |z|^n$ ; **b.** Si $z'$ non nul, alors $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; **(0,25 + 0,25) pt**

**c.** $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$, $n$ un entier naturel ; **0,25 pt**

**d.** Si $z'$ non nul, alors $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$. **0,25 pt**

**2.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$. Nous avons les interprétations géométriques suivantes :

**a.** $|z_B - z_A| = AB$ ; **b.** $\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_C}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$. **(0,25 + 0,25) pt**

**3.** Formule de Moivre : Pour tout entier relatif $n$ et tout réel $\theta$ on a :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. **0,5 pt**

## Partie B

$s$ est une transformation du plan qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = a^3 z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

**1.** Soit $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $s$.
Calculons $a^3$ et $a^2$.
On sait que $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où
$a^3 = e^{i\pi} = -1$, **0,25 pt**
et $a^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0,25 pt**
Ainsi $z' = -z - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0,25 pt**
Déterminons l'ensemble des points invariants de $s$.
Soit $\Omega(z_0)$ tel que $s(\Omega) = \Omega$, on a $z_0 = -z_0 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $z_0 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
$s$ admet un unique point invariant le point $\Omega$ d'affixe $z_0 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **0,25 pt**
On a $z' - z_0 = -z - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = -z - \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = -(z - z_0)$.
Ce qui donne, pour tout $z \neq z_0$, $\dfrac{z' - z_0}{z - z_0} = -1$,
ceci implique, pour tout $z \neq z_0$, que $|z' - z_0| = |z - z_0|$ et $\arg(\dfrac{z' - z_0}{z - z_0}) = \pi\ [2\pi]$. **0,5 pt**

D'où pour tout point $M(z)$ distinct de $\Omega$, d'image par $s$ le point $M'(z')$, on a :
$\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \pi \ [2\pi]$.
Donc $s$ est une symétrie centrale de centre $\Omega$. **0,5 pt**

**2.** Déterminons les nombres complexes $a$ pour lesquels :

**a.** $s$ **est une translation**.

On sait que $s$ est une translation si et seulement si, $z'$ s'écrit sous la forme :
$z' = z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = 1$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons $a$ tel que $a^3 = 1$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = 0\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes $a$ pour lesquels $s$ est une translation sont :
$a_0 = 1$, $a_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
Ou encore $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $a_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0,75 pt**

**b.** $s$ **est une rotation d'angle** $\dfrac{3\pi}{2}$.

On sait que $s$ est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ si et seulement si, $z'$ s'écrit sous la forme :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -i$. **0,25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = i^3$ ou encore $a^3 - i^3 = 0$. Ce qui donne $(a - i)(a^2 + ai - 1) = 0$.
On trouve $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0,75 pt**

**Autre méthode** :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons $a$ tel que $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = \dfrac{3\pi}{2}\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes $a$ pour lesquels $s$ est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ sont :
$a_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $a_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et $a_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
Ou $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0,75 pt**

**c.** $s$ **est une homothétie de rapport** $-8$.

On sait que $s$ est une homothétie de rapport $-8$ si et seulement si, $z'$ s'écrit sous la forme :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0,25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = (-2)^3$.
Ce qui donne $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) = 0$.
On trouve $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0,75 pt**

**Autre méthode** :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons $a$ tel que $a^3 = -8$.
On a $|a|^3 = 8$ ce qui donne $|a| = 2$.
Et $3(\arg(a)) = \pi\,[2\pi]$ ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent les nombres complexes $a$ pour lesquels $s$ est une translation sont :
$a_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $a_1 = 2e^{i\pi}$ et $a_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.
Ou $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0,75 pt**

**Exercice 2 (03 points).**

**1.** On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme $S$ des chiffres apparus sur la face de dessus.
Considérons l'ensemble $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \times \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ qui modélise les différents résultats de l'expérience aléatoire.

**a.** Les valeurs possibles de $S$ sont : $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12.$ **0,5pt**

Nous notons l'ensemble des résultats possibles, l'univers $\Omega$.
$\Omega$ est représenté dans le tableau ci-dessous :

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Ainsi, nous avons le cardinal de $\Omega$ qui est égal au nombre de couples.

$card(\Omega) = 36.$ **0,25pt**

**b.** Déterminons la probabilité d'obtenir une somme égale à 9.

Soit $A$ l'événement "obtenir une somme égale à 9". On a d'après le tableau ci-dessus l'événement $A$ est la réunion des événements élémentaires $\{(3,6)\},\ \{(4,5)\},\ \{(5,4)\},\ \{(6,3)\}$.

$$A = \{(3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3)\}.$$

Il faut noter ici que tous les couples ou événements élémentaires sont équiprobables.
D'où $p(A) = 4 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{9}$. **0,25pt**

**2.** Marame et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.

**a.** Soit $B$ l'événement "afficher un score de 8" et $C$ l'événement "afficher un score de 7".

$$B = \{(2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (5,3),\ (6,2)\},$$

et

$$C = \{(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\}.$$

D'où $p(B) = 5 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36}$ et $p(C) = 6 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Soit $D$ l'événement "Marame et Birane affichent chacun un même score de 9, 7 ou 8".
Le résultat obtenu par Marame n'influence pas celui obtenu par Birane, et vice versa. Donc
$p(D) = p(A) \times p(A) + p(B) \times p(B) + p(C) \times p(C) = \dfrac{16}{36^2} + \dfrac{25}{36^2} + \dfrac{36}{36^2} = \dfrac{77}{36^2}$. **0,75pt**

**b.** Soit $E$ l'événement "ils affichent le même score".
Alors $p(E) = p(S=2) \times p(S=2) + p(S=3) \times p(S=3) + ..... + p(S=12) \times p(S=12)$.
Ce qui donne

$$p(E) = \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{2}{36} \times \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \times \frac{3}{36} + \frac{4}{36} \times \frac{4}{36} + \frac{5}{36} \times \frac{5}{36} + \frac{6}{36} \times \frac{6}{36} + \frac{5}{36} \times \frac{5}{36} + \frac{4}{36} \times \frac{4}{36} + \frac{3}{36} \times \frac{3}{36} + \frac{2}{36} \times \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{36^2} + \frac{4}{36^2} + \frac{9}{36^2} + \frac{16}{36^2} + \frac{25}{36^2} + \frac{36}{36^2} + \frac{25}{36^2} + \frac{16}{36^2} + \frac{9}{36^2} + \frac{1}{36^2}.$$

D'où $p(E) = \dfrac{146}{36^2} = \dfrac{73}{648}$. **0,5pt**

**c.** Celui qui affiche le plus grand score gagne.

Calculons la probabilité pour que Marame gagne.

Soit $F$ l'événement "Marame gagne".

$p(F) = \dfrac{1}{36} \times \dfrac{35}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{33}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{30}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{26}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{21}{36} + \dfrac{6}{36} \times \dfrac{15}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{10}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{6}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{3}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{1}{36}$.

Ce qui donne $p(F) = \dfrac{575}{1296}$. **0,75pt**

**Autre méthode** :

Soit $F$ l'événement "Marame gagne", $G$ l'événement "Birane gagne" et $E$ l'événement "ils affichent le même score".

On a $p(F) + p(G) + p(E) = 1$. Or $p(F) = p(G)$, ce qui implique $p(F) = \dfrac{1 - p(E)}{2} = \dfrac{1 - \dfrac{73}{648}}{2}$.

Ce qui donne $p(F) = \dfrac{575}{1296}$. **0,75pt**

**PROBLEME (10 points).**

On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2} & si \ \ x \leq 0 \\ \\ x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

**1.** Etablissons que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \longmapsto x + 1$ est définie partout dans $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction $x \longmapsto \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$ est définie par composée si $e^x \neq -2$, ce qui est toujours vrai.
D'où $x \longmapsto x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$ est définie par somme, si $x \leq 0$.

— La fonction $x \longmapsto x + 2$ est définie partout dans $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ est définie par produit puis par composée si $x > -1$, donc elle est définie si $x > 0$.
D'où $x \longmapsto x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ est définie si $x > 0$.

Par conséquent $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**

**2. a.** Etudions la continuité de $f$ en 0.

— $f(0) = 0 + 1 + \dfrac{3e^0}{e^0 + 2} = 2$,

— $\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2} = 2$, **0,25 pt**

— $\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x>0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 2$. **0,25 pt**

$\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2$, d'où $f$ est continue en 0. **0,25 pt**

**b.** Pour $x < 0$, montrons que $\dfrac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x} \times \dfrac{1}{(e^x+2)}$.

$\dfrac{f(x)-2}{x-0} = \dfrac{x+1+\dfrac{3e^x}{e^x+2}-2}{x} = \dfrac{x-1+\dfrac{3e^x}{e^x+2}}{x} = \dfrac{x+\dfrac{2e^x-2}{e^x+2}}{x} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x(e^x+2)}$, d'où le résultat. **0, 5 pt**

Déduisons-en $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{f(x)-2}{x-0} = \lim_{x\to 0,\, x<0} 1 + \frac{2(e^x-1)}{x} \times \frac{1}{(e^x+2)} = 1 + 2 \times \frac{1}{3}$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{5}{3}$. **0, 25 pt**

**c.** Concluons sur la dérivabilité de $f$ en 0 et interprétons graphiquement les résultats.

Calculons $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et comparons la avec le résultat précédent.

$\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{x+2+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}-2}{x} = \lim_{x\to 0,\, x>0} 1 + \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln(x+1)}{x} = 2.$

$\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, donc $f$ n'est pas dérivable en 0. **0, 25 pt**

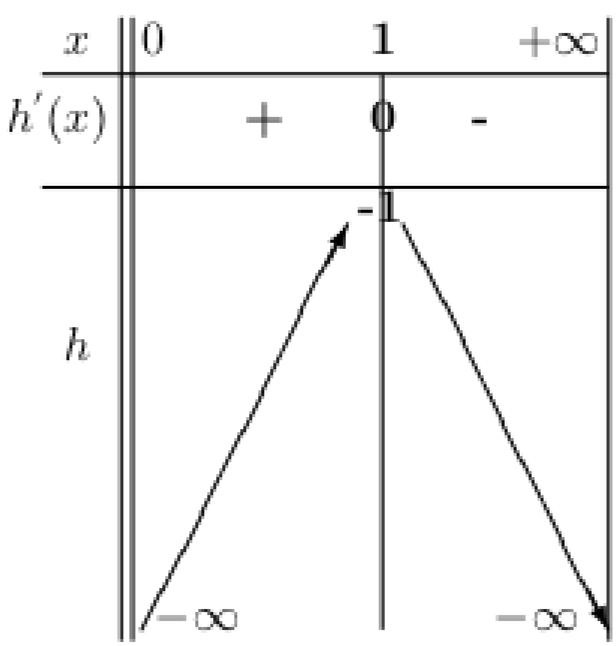
La courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de $f$ admet une demi-tangente de pente $\dfrac{5}{3}$ en 0 à gauche et une demi-tangente de pente 2 en 0 à droite. **0, 25 pt**

**3. a.** En utilisant les variations de la fonction $h$ définie par $h(x) = \ln(x) - x$, montrons que $\ln(x) < x$ pour $x > 0$.

$h$ est définie si $x > 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) - x = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} x(\frac{\ln x}{x} - 1) = -\infty$

$h'(x) = \dfrac{1-x}{x}$, $\;h'(x) \geq 0$ sur $]0;1]$ et $h'(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$




**0, 25pt**

D'après le tableau de variations de $h$, pour tout $x > 0$, $h(x) \leq -1$. Ce qui implique que $h(x) < 0$ pour tout $x > 0$, d'où le résultat. **0,25pt**

**Déduisons en que** $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$.

$\ln(x) < x$ pour $x > 0$, ceci implique que pour $x > 0$, $\ln(x+1) < x+1$.
Or si $x > 0$ alors $x+1 > 1$, ce qui donne $(x+1)^2 > x+1$.
Par conséquent, $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$. **0,5pt**

**b.** Calculons $f'(x)$ pour $x > 0$

Pour $x > 0$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Ce qui donne $f'(x) = 1 + \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$, ou encore

$f'(x) = \dfrac{1 + (x+1)^2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$ **0,5pt**

**Déterminons le signe de** $f'(x)$ pour $x > 0$.

D'après **3.a.** $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$, ce qui implique que $(x+1)^2 - \ln(x+1) > 0$, pour $x > 0$.
D'où $1 + (x+1)^2 - \ln(x+1) > 0$ pour $x > 0$.
Par conséquent $\dfrac{1 + (x+1)^2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} > 0$ pour $x > 0$, car $(x+1)^2 > 0$ pour tout $x$.
Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. **0,5 pt**

**c.** Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$.

Pour $x < 0$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$.

Ce qui donne $f'(x) = 1 + \dfrac{3e^x(e^x+2) - 3e^{2x}}{(e^x+2)^2}$ pour $x < 0$, ou encore

$f'(x) = 1 + \dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2}$, pour $x < 0$. **0,5 pt**

**Signe de** $f'(x)$ pour $x < 0$.

Pour tout $x$, $\dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2} > 0$. D'où $1 + \dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2} > 0$ par somme, pour tout $x$.
Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x < 0$. **0,25 pt**

**4. a.** Calculons les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x+2}$.

On sait que, d'une part $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x}{e^x+2} = 0$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$

On peut conclure que $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x+2} = -\infty$. **0,25 pt**

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Posons $X = x + 1$. Si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$.
Or on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.
On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$

On peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$. **0,25 pt**

**b.** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x}{e^x+2} = 0$, d'après ce qui précède. **0,25 pt**

**Interprétation graphique du résultat** :

La droite $(D_1)$ d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe de $f$ au voisinage de $-\infty$. **0,25 pt**

**c.** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$, d'après ce qui précède. **0,25 pt**

**Interprétation graphique du résultat** :

La droite $(D_2)$ d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe de $f$ au voisinage de $+\infty$. **0,25 pt**

**d.** Etude du signe de $f(x)-(x+1)$ pour $x<0$.

Pour $x<0$, $f(x)-(x+1) = \dfrac{3e^x}{e^x+2}$. Or $e^x > 0$ pour tout $x$, d'où $\dfrac{3e^x}{e^x+2} > 0$ pour tout $x$, précisément pour tout $x<0$. Donc $f(x)-(x+1) > 0$ pour $x<0$. **0,25 pt**

Montrons que $f(x)-(x+2) > 0$ pour $x>0$.

Pour $x>0$, $f(x)-(x+2) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

On sait que $\ln y > 0$ pour tout $y>1$. Or pour $x>0$, $x+1>1$ donc $\ln(x+1) > 0$ pour $x>0$.

D'où $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} > 0$ pour $x>0$ ou encore $f(x)-(x+2) > 0$ pour $x>0$. **0,25 pt**

**Interprétation graphique des résultats** :

- $f(x)-(x+1) > 0$ pour $x<0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction est au dessus de la droite $(D_1)$ au voisinage de $-\infty$.
- $f(x)-(x+2) > 0$ pour $x>0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction est au dessus de la droite $(D_2)$ au voisinage de $+\infty$.

**0,25 pt**

**5.** Soit $\mathbb{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ **au point** $A(x_0,\ y_0)$, parallèle à l'asymptote pour $x>0$.
Alors $\mathbb{T}$ a une équation de la forme $y = x - x_0 + y_0$.
$A \in \mathbb{T}\cap\mathcal{C}_f$, d'où les coordonnées de $A$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x_0) = 1 \\ y_0 = x_0 + 2 + \dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0+1}, \qquad \text{avec } x_0 > 0. \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

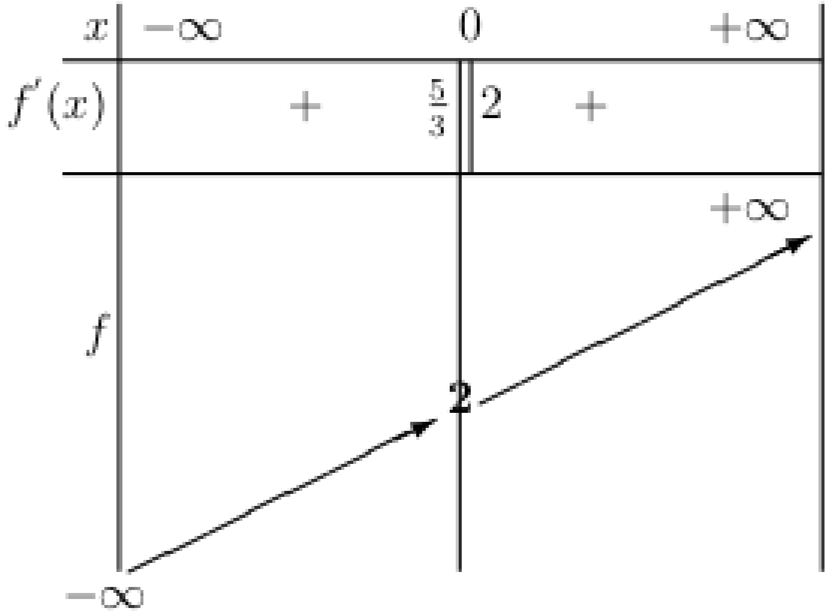
$$\begin{cases} \dfrac{1+(x_0+1)^2-\ln(x_0+1)}{(x_0+1)^2} = 1 \\ y_0 = x_0 + 2 + \dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0+1}, \qquad \text{avec } x_0 > 0. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x_0 = e-1 \\ y_0 = e+1+\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

D'où $A$ a pour coordonnées $(e-1, e+1+\dfrac{1}{e})$. **0,25 pt**

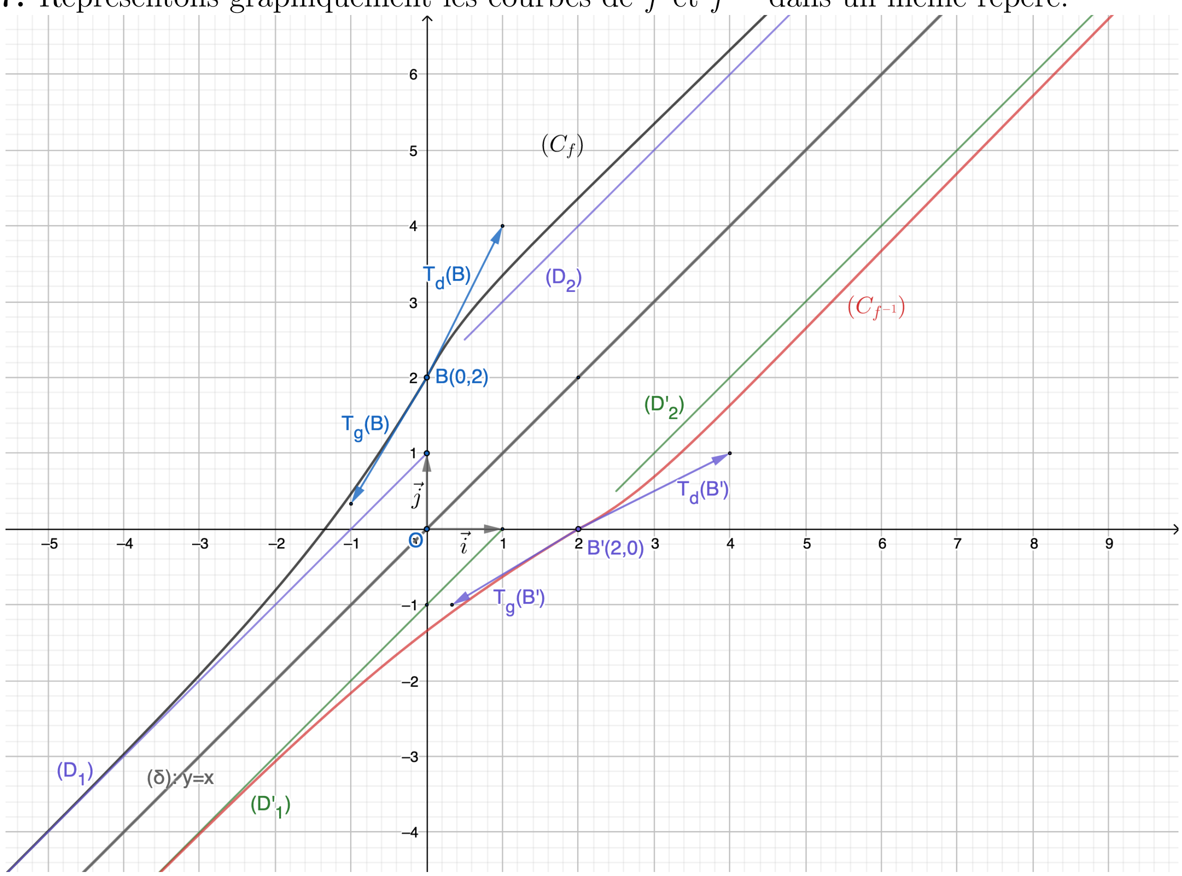
**6.** Dressons d'abord le tableau de variations de $f$.




**0, 25pt**

Etablissons que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $J$ à préciser.
$f$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, donc $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = \mathbb{R}$. **0, 25 pt**

**7.** Représentons graphiquement les courbes de $f$ et $f^{-1}$ dans un même repère.




**1 pt**

**8.** Calcul de $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx$.

$$\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx = \int_{-\ln 3}^{0} \frac{3e^x}{e^x+2}dx = 3\left[\ln(e^x+2)\right]_{-\ln 3}^{0} = 6\ln 3 - 3\ln 7.$$ **0, 5 pt**

**9.** Interprétation du résultat précédent en terme d'aire.

$\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0}\Big(f(x)-(x+1)\Big)dx \times u.a = (6\ln 3 - 3\ln 7)cm^2$ est l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite $(D_1)$, les droites d'équations $x=-\ln 3$ et $x=0$. **$0,25$ pt**